Equazioni e geometria

Paolo Hägler e Gianfranco Arrigo

Sunto: in questo articolo vengono presentati dei metodi geometrici per risolvere delle equazioni di primo e secondo grado, con il vincolo di coefficienti e soluzioni positive.

Il binomio equazioni e geometria può sembrare strano e stravagante, ma in passato (in particolare tra l'800 e il 1200) gli arabi intrecciarono fortemente i due concetti, in quanto utilizzarono la geometria per risolvere diversi tipi di equazioni (come ad esempio le polinomiali di terzo e alcune di quarto grado, ma non solo). Ovviamente, trattandosi di geometria, venivano considerati soltanto valori positivi (come fu il caso in Europa, anche per molti secoli dopo).

Non vogliamo qui addentrarci nella storia della matematica araba, ma semplicemente mostrare come si possa usare la geometria per risolvere equazioni più semplici, di primo e secondo grado. Poiché siano in ambito geometrico, useremo e considereremo soltanto valori positivi, come si faceva nel bacino del Mediterraneo un millennio fa.

Con questo vincolo esiste un'unica equazione di primo grado, $ax=b$, e ben 5 di secondo grado: $ax^2 = bx$, $ax^2 = c$, $ax^2 + c = bx$, $ax^2 + bx = c$, $ax^2 = bx + c$. Queste ultime 3, se divise per a, danno luogo alle equazioni "canoniche" $x^2 + c = bx$, $x^2 + bx = c$ e $x^2 = bx + c$, mentre le prime due si riconducono rispettivamente al primo grado (vedi sopra) e all'estrazione di radice (che si svolge come vedremo in seguito per l'equazione $x^2 + c = bx$.

Iniziamo con l'equazione di primo grado. Essa può essere risolta, in ambito geometrico, semplicemente grazie ai triangoli simili. Vediamo come nella figura 1.
Tracciamo due semirette con la stessa origine, in O. Su una troviamo il punto U che dista l'unità da O, e sull'altra il punto A che dista a da O e il punto B che dista b da O. Tracciamo poi il segmento AU, e la retta a lui parallela che passa per B. Questa retta incontrerà la semiretta con origine in O che passa per U in un punto, che possiamo chiamare X, che dista x da O. E quindi abbiamo la nostra incognita.

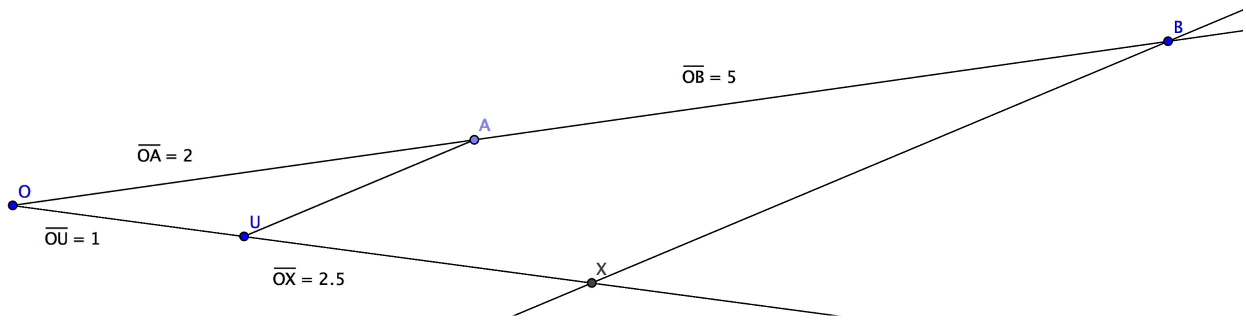

Figura 1. Una soluzione geometrica dell'equazione di primo grado 2x = 5.

Passiamo alle equazioni di secondo grado. Qui non bastano i triangoli, ma serve anche una circonferenza. E dal punto di vista dei teoremi, oltre ai triangoli simili che permettono di dimostrare il secondo teorema di Euclide, serve anche il teorema di Talete relativo al cerchio. Ossia, occorre sapere che un triangolo iscritto in una semicirconferenza è rettangolo (si dimostra facilmente tracciando il terzo raggio, analizzando le ampiezze degli angoli dei tre triangoli e conoscendo la somma degli angoli interni di un triangolo) e che in un triangolo rettangolo il quadrato dell'altezza relativa all'ipotenusa è uguale al prodotto delle proiezioni ortogonali dei cateti sull'ipotenusa (come detto si dimostra utilizzando i triangoli simili).

Iniziamo con l'equazione della forma $x^2 + c = bx$, aiutandoci con la figura 2.
Tracciamo una retta che passa per un punto O, e su questa, da un lato troviamo il punto A che dista un'unità, e dall'altro il punto B che dista c unità. Cerchiamo poi C, punto medio di AB, e tracciamo la semicirconferenza di centro C che passa per A e B. Tracciamo poi la perpendicolare alla retta che passa per O: essa interseca la semicirconferenza in un punto D, la cui distanza da O è la radice di c (da cui il metodo per risolvere l'equazione $ax^2 = c$).
A questo punto tracciamo una parallela alla retta passante per A e B che passa per D, e su questa troviamo F che dista b da D. Cerchiamo poi G il punto medio di DF, e tracciamo la semicirconferenza di centro G che passa per D e F. Se questa circonferenza interseca la retta che passa per A e B l'equazione ha due soluzioni positive. Sia H una di queste due intersezioni e tracciamo la perpendicolare alla retta che passa per A e B passante per H. Questa retta interseca la retta passante per D e F in un punto, che chiamiamo J. Le due soluzioni dell'equazione sono allora le lunghezze dei segmenti DJ e JF.

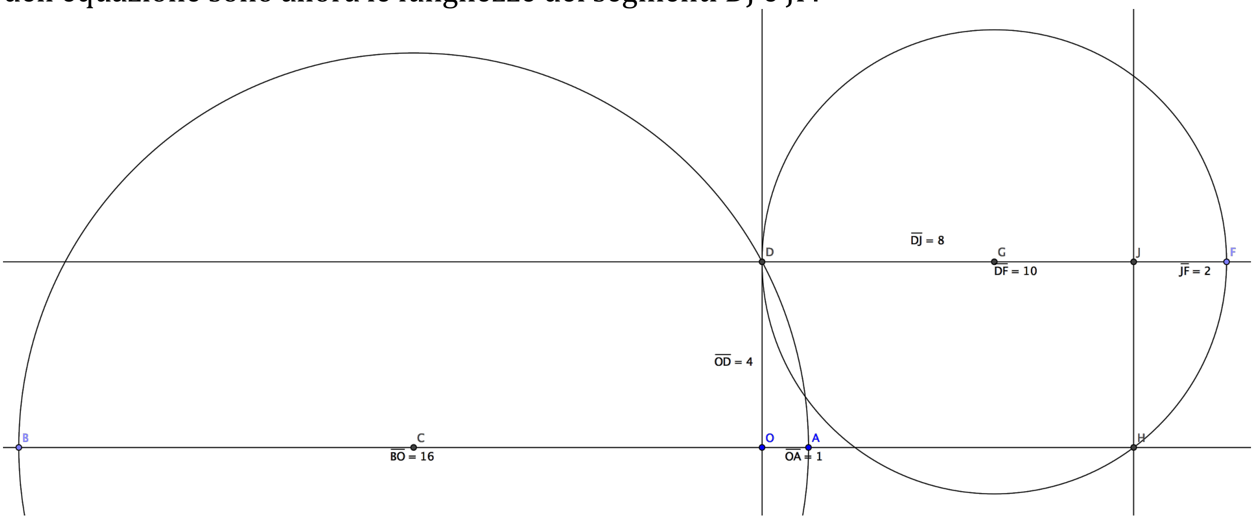

Figura 2. Una soluzione geometrica dell'equazione di secondo grado $x^2 + 16 = 10x$.

Passiamo ora alle equazioni $x^2 + bx = c$ e $x^2 = bx + c$ che si risolvono allo stesso modo; in effetti la prima diventa $x(x + b) = c$ e la seconda diventa $x(x - b) = c$. In entrambi i casi cerchiamo due numeri che differiscono di b e il cui prodotto è c. Nel primo caso la soluzione è il più piccolo dei due numeri e nel secondo è il più grande. Vediamo la risoluzione aiutandoci con la figura 3.
Iniziamo come per l'equazione $x^2 + c = bx$, ossia tracciamo una retta che passa per un punto O, e su questa, da un lato troviamo il punto A che dista un'unità, e dall'altro il punto B che dista c unità. Cerchiamo poi C, punto medio di AB, e tracciamo la semicirconferenza di centro C che passa per A e B. Tracciamo poi la perpendicolare alla retta che passa per O: essa interseca la semicirconferenza in un punto D, la cui distanza da O è la radice di c.
A questo punto tracciamo una parallela alla retta passante per A e B che passa per D, e su questa troviamo F che dista b da D. Cerchiamo poi G il punto medio di DF, e tracciamo la perpendicolare alla retta che passa per D e F passante per G. Questa retta interseca la retta che passa per A e B in un punto, che chiamiamo H. Tracciamo poi la semicirconferenza di centro D che passa per H. Essa incontrerà la retta che passa per D e F in due punti, che chiamiamo I (il punto dalla parte di G rispetto al centro D) e J (l'altro punto). I due numeri cercati sono le lunghezze di IG (quello piccolo e soluzione dell'equazione $x^2 + bx = c$) e JG (quello grande e soluzione dell'equazione $x^2 = bx + c$).

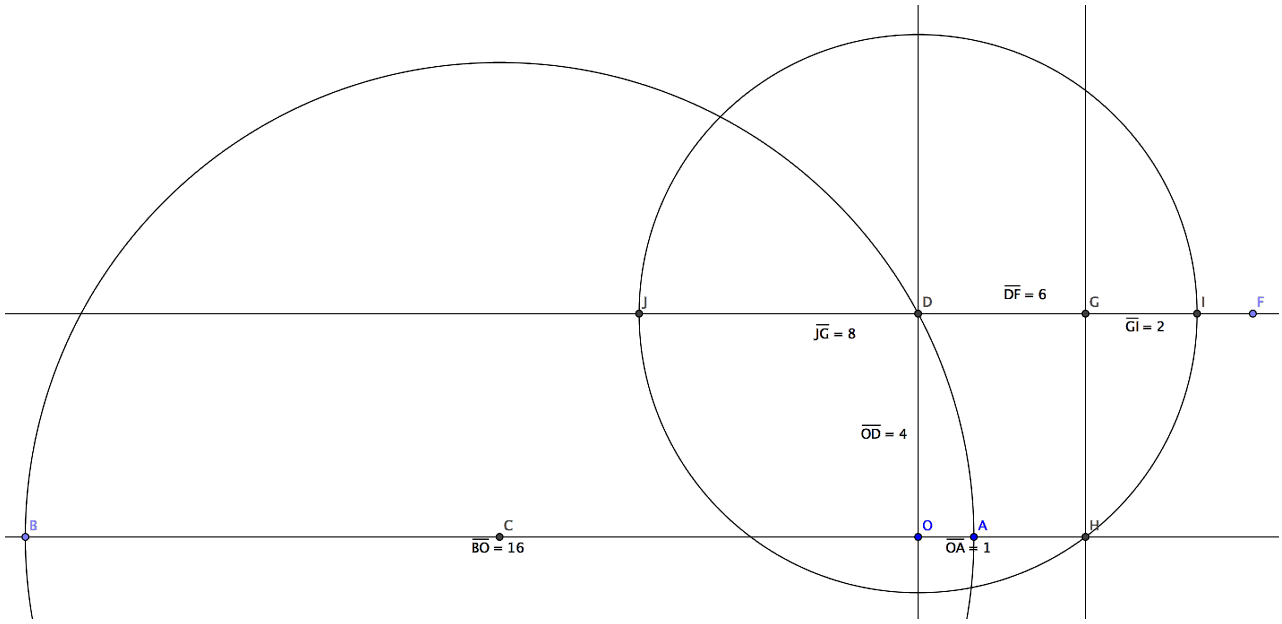

Figura 3. Una soluzione geometrica dell'equazione di secondo grado $x^2 + 6x = 16$.