Calcolo mentale-scritto, approssimato e strumentale: teoria ed esempi

Gianfranco Arrigo, SUPSI-DFA Locarno, NRD Bologna

Tre aspetti basilari e altrettante concezioni da modificare:

- calcolo e ragionamento: calcolo ragionato (calcul réfléchi – halbschriftlisches Rechnen); il calcolo (e non solo la geometria) come scuola di ragionamento
- calcolo esatto e calcolo approssimato: due modi di calcolare ugualmente importanti
- calcolo mentale e strumento di calcolo: necessità di rafforzare le abilità del calcolo mentale (stima del risultato, ma non solo) e dell'uso degli strumenti elettronici di calcolo.

Il calcolo ragionato al posto di quello mnemonico (o calcolo in colonna): un cambiamento che «s'ha da fare»

Un esempio svizzero: il canton Lucerna

Adeguamento dei programmi 2006: Cambiamento nel modo di calcolare

Cambiamento importante: a partire dall'anno scolastico 2007/08 dalla 3ª alla 6ª classe i procedimenti scritti del calcolo relativi a (addizione), sottrazione, moltiplicazione e divisione non fanno più parte degli argomenti da insegnare.

Le quattro (tre) operazioni aritmetiche devono essere introdotte ed esercitate seguendo il metodo del calcolo ragionato (halbschriftliches Rechenverfahren).

Progetto per l'insegnamento del calcolo a scuola

Principi fondamentali:

1. Calcoli semplici e stima di risultati si eseguono usando la propria mente (calcolo ragionato mentale-scritto, uso di schemi e scrittura matematica in riga).

2. Calcoli complicati e sequenze complesse di calcoli si fanno a macchina.

3. Il calcolo scritto (l'insieme degli algoritmi arabici o calcoli in colonna) non dovrebbe più far parte dei programmi, ma, se lo si vuole, può essere visto in un contesto storico.

Calcolo numerico
obiettivi finali

Gianfranco Arrigo, SUPSI-DFA Locarno, NRD Bologna

Franchi-euro

Siamo partiti per le vacanze marine con 3000 euro.
Durante le vacanze abbiamo speso 878,80 per l'affitto, 535.73 euro per il cibo, 377,85 euro in benzina e pedaggi autostradali e 658,67 euro per divertimenti e acquisti vari. Tornati a casa, portiamo gli euro avanzati in banca per cambiarli in franchi. L'impiegato ci dà franchi 1,18 per ogni euro. Quanti franchi dobbiamo ricevere?

Espressione risolutiva:

[3000 – (878,80 + 535,73 + 377,85 + 658,67)] x 1,18

Stima del risultato in franchi:

[3000 – (870 + 530 + 380 + 660)] x 1,2 = [3000 – 2440] x 1,2 =

= 560 x 1,2 = 56 x 12 = (50 + 6) x 12 = 600 + 72 = 672

Franchi ed euro

[3000 – (878,80 + 535,73 + 377,85 + 658,67)] x 1,18

Con la calcolatrice:

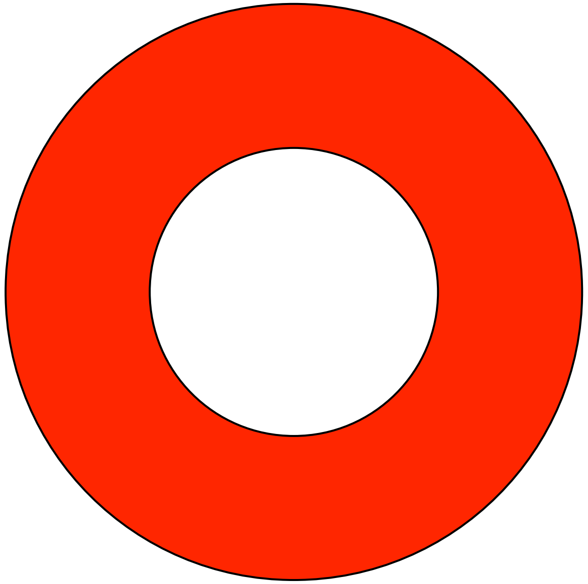
3000 – (878.80 + 535.73 + 377.85 + 658.67) =

x 1.18 = **642.2715**

Risultato stimato in franchi: 672 risultato credibile.

Risultato interpretato in franchi: 642,30 oppure 642

Area della corona circolare



Stima del risultato:

$3 \times 40 \times 40 - 3 \times 20 \times 20 =$

$= 3 \times 1600 - 3 \times 400 =$
$= 4800 - 1200 = 3600$

Raggio esterno: 37.00 m
Raggio interno: 17.00 m

Espressione numerica per il calcolo dell'area in m^2:

$$\pi \times 37 \times 37 - \pi \times 17 \times 17$$

Oppure:

$$\pi \times 37^2 - \pi \times 17^2$$

Oppure ancora:

$$\pi \times \left(37^2 - 17^2\right)$$

Area della corona circolare

Con la calcolatrice: $\pi \times 37 \times 37 - \pi \times 17 \times 17$

π x 37 x 37 - π x 37 x 37 = 3392.9200658

$\pi \times 37^2 - \pi \times 17^2$ π × 37 x^2 – π × 17 x^2 =

$\pi \times \left(37^2 - 17^2\right)$ π × [(37 x^2 – 17 x^2)] =

Stima del risultato: 3600

Interpretazione del risultato: 3393 m^2

Oppure: 3392.92 dm^2

Oppure: 3392.9201 cm^2

Flash sul calcolo mentale-scritto

Gianfranco Arrigo, SUPSI-DFA Locarno, NRD Bologna

L'addizione: l'operazione più importante

Da subito l'ampliamento ai multipli di 10, 100, …

Se so che…

3 + 2 = 5

7 + 6 = 13

Posso anche calcolare…

30 + 20, 300 + 200, …

70 + 60, 700 + 600, …

I bambini stessi ce lo chiedono, desiderano i numeri grandi.

Inoltre, quando si conosce la scomposizione in h / da / u, si possono eseguire calcoli del tipo

7 h + 16 da = 7 h + 1 h + 6 da = 8 h + 6 da = 860 …

Per poi giungere ad eseguire le «solite» addizioni:

372 + 526 = 300 + 70 + 2 + 500 + 20 + 6 = 800 + 90 + 8 = 898

L'addizione con numeri decimali

Esempi

0,2 + 0,3 = 0,5 2 d + 3 d = 5 d

3,5 + 0,05 = 3,55 350 c + 5 c = 355 c

Ogni addizione (operazione aritmetica) con numeri decimali può essere trasformata in una con numeri interi.

Le addizioni vincenti

Gli allievi devono trovare la necessaria motivazione che li spinga a dedicarsi al calcolo mentale.

Perciò, specialmente all'inizio, occorre metterli di fronte a casi vincenti. Eccone alcuni:

Presenza di complementi alla decina o al centinaio

$4 + 17 + 6 + 13 = (4 + 6) + (17 + 13) = 10 + 30 = 40$

Presenza di addendi ripetuti

$5 + 5 + 3 + 3 + 3 + 6 + 6 + 3 + 4 + 4 + 4 + 4 + 3 + 5 + 4 + 6 =$
$= 5 \times 3 + 3 \times 5 + 6 \times 3 + 4 \times 5 = 15 + 15 + 18 + 20 = 68$

Con addendi "vicini".

$607 + 606 + 605 + 606 =$
$= 600 \times 4 + 7 + 6 + 5 + 6 = 2400 + 24 = 2424$

La sottrazione

Il passaggio da $43 + ? = 59$ a $? = 59 - 43$ è delicato.

Siamo in presenza di un cambiamento di registro semiotico: conversione dal registro additivo a quello sottrativo.

Vi sono due tecniche fondamentali per eseguire mentalmente una sottrazione. Vediamo la prima:

$$73 - 17 = (73 - 10) - 7 = 63 - 7 = (63 - 3) - 4 = 60 - 4 = 5$$

Seconda tecnica: «dal basso all'alto»

$$17 \xrightarrow{+3} 20 \xrightarrow{+50} 70 \xrightarrow{+3} 73$$

$$73 - 17 = 3 + 50 + 3 = 56$$

Come dire: la sottrazione trasformata in addizione.

La moltiplicazione: oltre le tabelline

Vale la pena di calcolare ed eventualmente memorizzare qualche quadrato oltre il 100. Per esempio:

$11 \times 11 = 11 \times 10 + 11 = 110 + 11 = 121$

$12 \times 12 = 12 \times 10 + 12 \times 2 = 120 + 24 = 144$

$15 \times 15 = 15 \times 10 + 15 \times 5 = 150 + 75 = 225$

$20 \times 20 = 400$; 30×30, ecc.

$25 \times 25 = 25 \times 20 + 25 \times 5 = 500 + 125 = 625$

$19 \times 19 = 19 \times 20 - 19 = 190 \times 2 - 19 = 380 - 19 = 361$

Combinare moltiplicazione con addizione e sottrazione è un gioco divertente e proficuo.

Uso della proprietà distributiva

$17 \times 4 = (10 + 7) \times 4 = 10 \times 4 + 7 \times 4 = 40 + 28 = 68$

$42 \times 14 = 42 \times (10 + 4) = 42 \times 10 + 42 \times 4 = 420 + 168 =$
$= 420 + 160 + 8 = 580 + 8 = 588$

$42 \times 14 = (40 + 2) \times 14 = 40 \times 14 + 2 \times 14 = 560 +28 = 588$

Oppure:

$42 \times 14 = ?$

	40	2
10	400	20
4	160	8

$42 \times 14 = 400 + 160 + 20 + 8 = 588$

Più difficile:

$347 \times 67 = ?$

	300	40	7
60	18’000	2’400	420
7	2’100	280	49

$347 \times 67 = 18'000 + 2'400 + 2'100 + 280 + 420 + 49 =$

$= 18'000 + 4'500 + 700 + 49 = 22'500 + 700 + 49 = 23'249$

Di nuovo si sfocia in un’addizione

Oppure ancora, schematicamente:

$136 \times 3 = ?$

$100 + 30 + 6$

$\times 3 \quad \times 3 \quad \times 3$

$300 + 90 + 18 = 408$

$29 \times 37 = ?$

$20 + 9$

$30 + 7$

$\times 30 \quad \times 7 \quad \times 30 \quad \times 7$

$600 + 140 + 270 + 63 =$

$= 900 + 40 + 70 + 63 =$

$= 900 + 103 + 70 = 1073$

Presenza di complementi alla decina, al centinaio o al migliaio

È molto utile conoscere i prodotti di fattori naturali che danno una potenza di 10:

$2 \times 5 = 10$

$2 \times 50 = 4 \times 25 = 100$

$2 \times 500 = 4 \times 250 = 8 \times 125 = 1000$

Applicazione nel calcolo

$4 \times 38 \times 25 = (4 \times 25) \times 38 = 3800$

$50 \times 223 \times 6 = (50 \times 2) \times (223 \times 3) = 100 \times 669 = 66900$

La divisione in N

Con il divisore di una sola cifra

301 : 7 = (280 + 21) : 7 = 280 : 7 + 21 : 7 = 40 + 3 = 43

301 : 7 = (140 + 140 + 21) : 7 = 20 + 20 + 3 = 43

Con il divisore di due cifre

a) Dividere per $d = a \cdot b$

390 : 15 = (390 : 5) : 3 = [(350 + 40) : 5] : 3 =

= [350 : 5 + 40 : 5] : 3 = 78 : 3 = (60 + 18) : 3 = 26

La divisione in N: esempi di altre procedure

Il metodo “delle sottrazioni successive”

845 : 65 = ?

$$845 \xrightarrow{-65 \times \mathbf{10}} 195 \xrightarrow{-65 \times \mathbf{2}} 65 \xrightarrow{-65 \times \mathbf{1}} 0$$

845 : 65 = 10 + 2 + 1 = 13

Il metodo additivo, “dal basso all’alto”

845 : 65 = ? Cioè: quante volte il 65 sta in 845?

$$\xrightarrow{65 \times \mathbf{10}} 650 \xrightarrow{+\ 65 \times \mathbf{3}} 845$$

845 : 65 = 10 + 3 = 13

Come dire: una divisione trasformata in un’addizione

La divisione in Q e la proprietà invariantiva

a) Moltiplicando per una potenza di 10, come d'abitudine

$45 : 1{,}5 = 450 : 15 = (450 : 5) : 3 = 90 : 3 = 30$

b) Moltiplicando per fattori diversi

$39 : 1{,}5 = 78 : 3 = (60 + 18) : 3 = 60 : 3 + 18 : 3 = 26$

$4{,}5 : 0{,}25 = (4{,}5 \times 4) : (0{,}25 \times 4) = (18 : 1) = 18$

$37{,}5 : 0{,}125 = (37{,}5 \times 8) : (0{,}125 \times 8) = (300 : 1) = 300$

Indirizzi utili:

gianfranco.arrigo@span.ch

www.dm.unibo.it/rsddm