GEOMETRIA DINAMICA

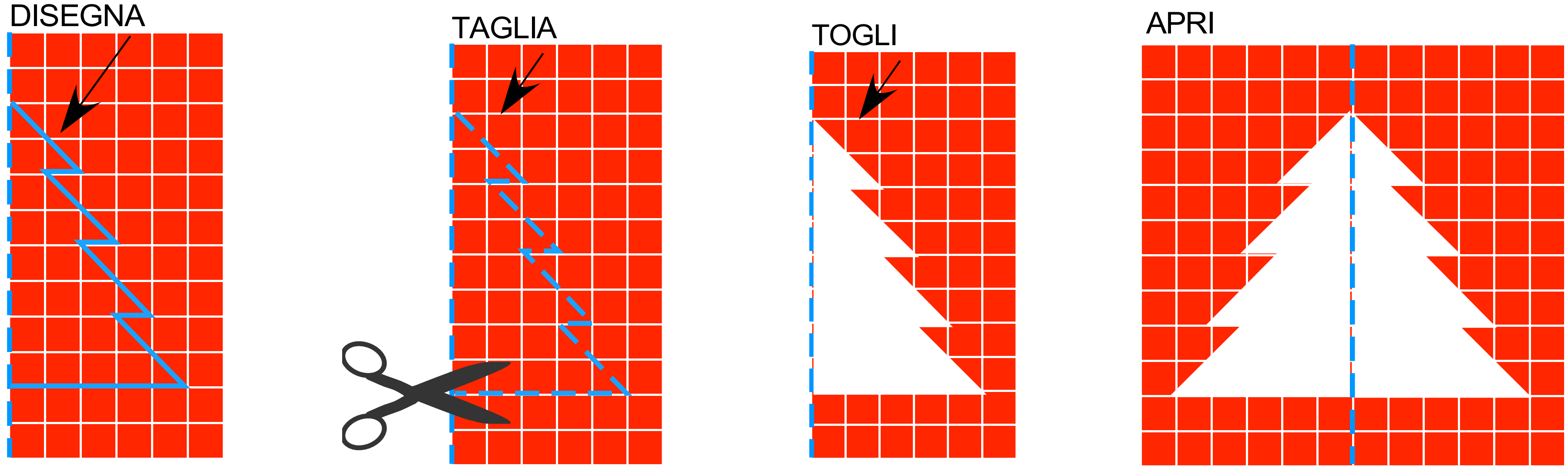
LEZIONE 2

Introduzione delle simmetrie assiali e centrali

Ovvero: un modo di osservare le figure geometriche

Sapyent

Carta, piega, taglia, apri e… osserva!



foglio
piegato
in due

Si ottiene una figura **simmetrica** (bella sagoma di abete).
La retta tratteggiata è l'asse di simmetria.

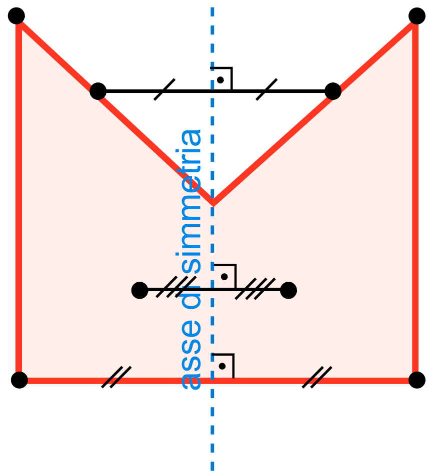
Per gli insegnanti

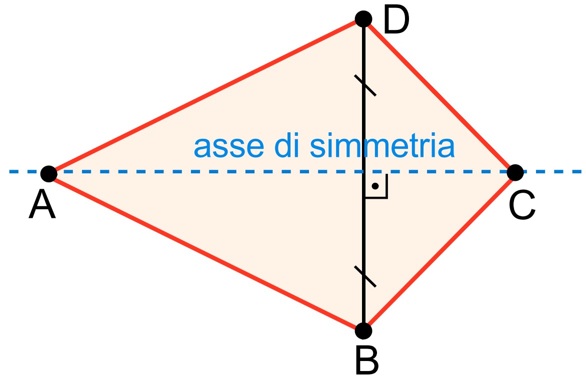
Spesso si nota che a scuola ci si limita a far disegnare dagli alunni la figura simmetrica di una data.
Contrariamente a quel che spesso si pensa, questa attività, per essere capita bene come vogliamo che avvenga, richiede non poche capacità di astrazione.
L'alunno dovrebbe considerare una funzione del piano in se stesso, quindi dovrebbe «vedere» tutti i punti del piano che «scambiano la posizione con quella dei punti simmetrici», il che non è da poco.
Le difficoltà aumentano quando la figura data è attraversata dall'asse di simmetria.
Anche ammettendo che ciò sia ben capito, non è per nulla chiaro a che cosa potrà servire.

Meglio concentrare l'attenzione, **da subito**, sulle figure simmetriche (in se stesse), cioè su quelle che mostrano di avere un asse (o un centro) di simmetria (figure **globalmente** fisse). Queste permettono di «leggere» direttamente le loro proprietà, dettate dalla simmetria: esse «parlano» all'alunno.

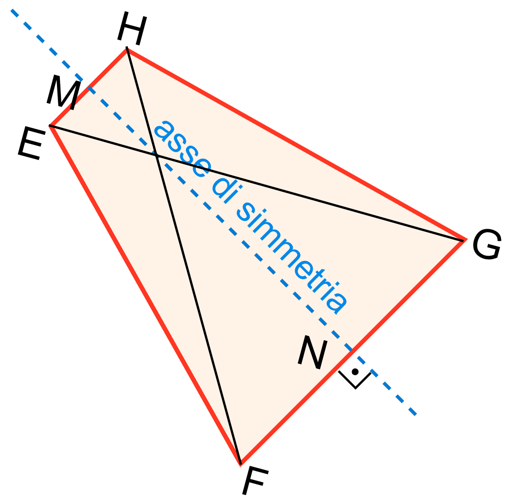
Dalla manipolazione alla geometria

Le figure simmetriche mostrano chiaramente
le loro proprietà.



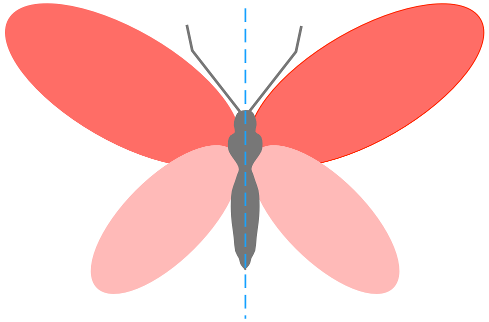


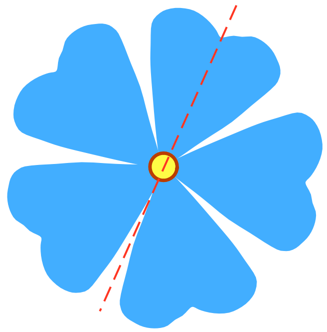
Deduzioni dirette:
AB=AD , CB=CD
BD e AC diagonali perpendicolari

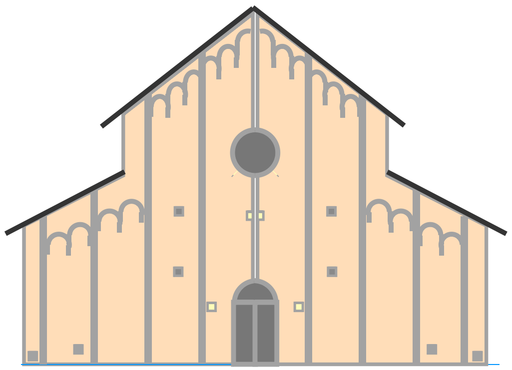


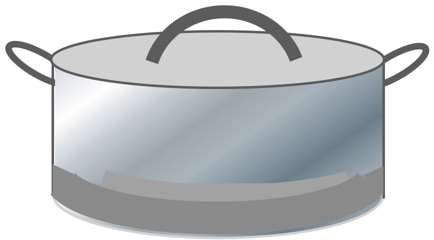
Deduzioni dirette:
HG=EF , EG=HF
(diagonali uguali)
M e N punti medi dei lati paralleli (basi)

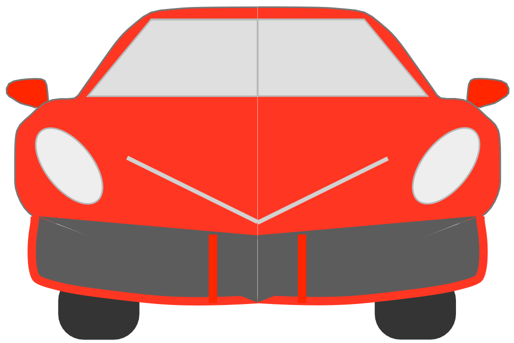
Figure simmetriche (rispetto a un asse) nella realtà





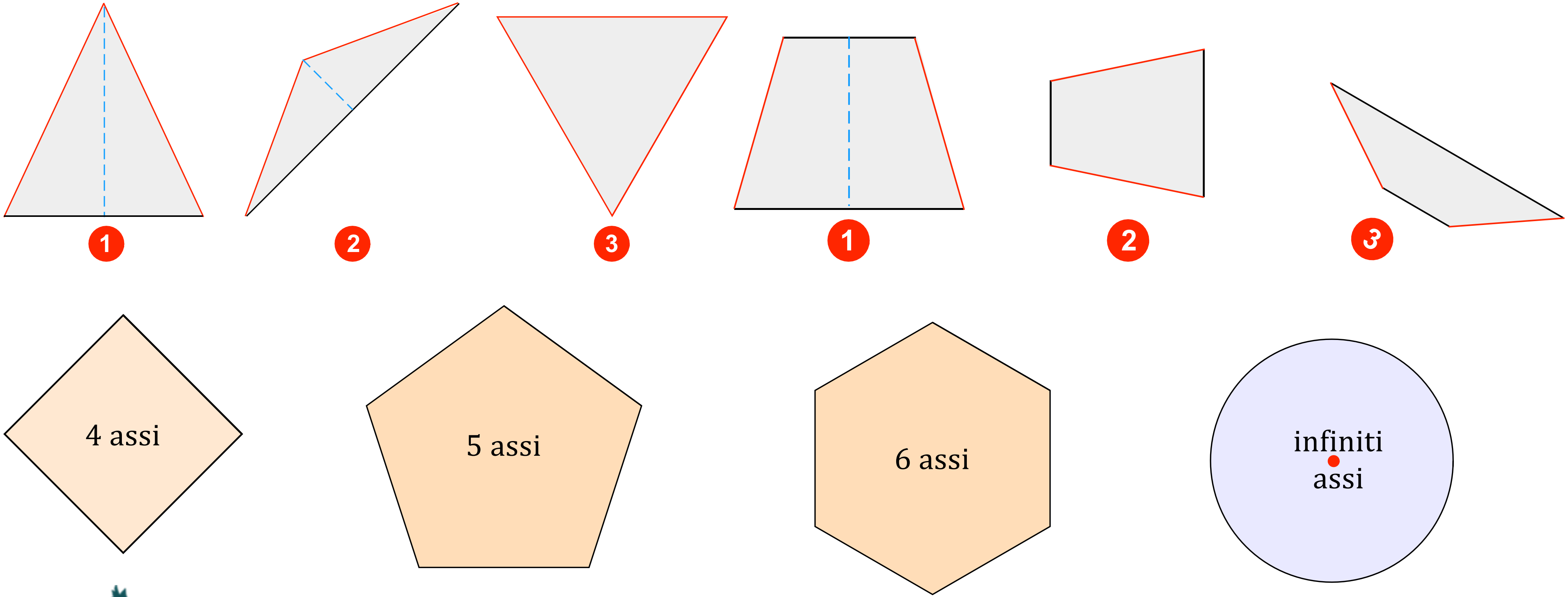






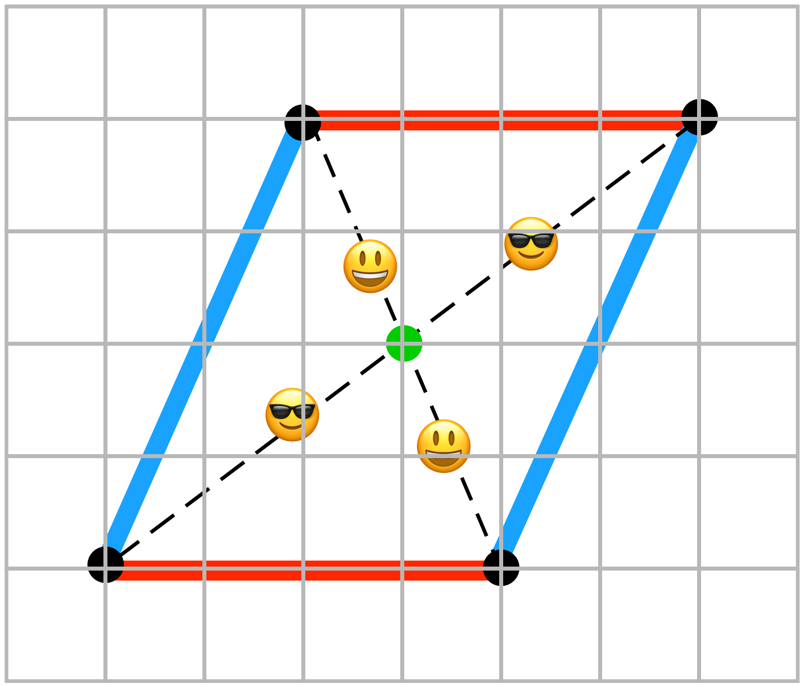
La simmetria di alcune figure piane

Disegna, se possibile, tutti gli assi di simmetria mancanti.



La simmetria centrale

Esempio. Il parallelogrammo.



Il punto verde è il **centro** di simmetria.

Due punti corrispondenti si trovano su una retta che passa per il centro e sono da esso equidistanti.

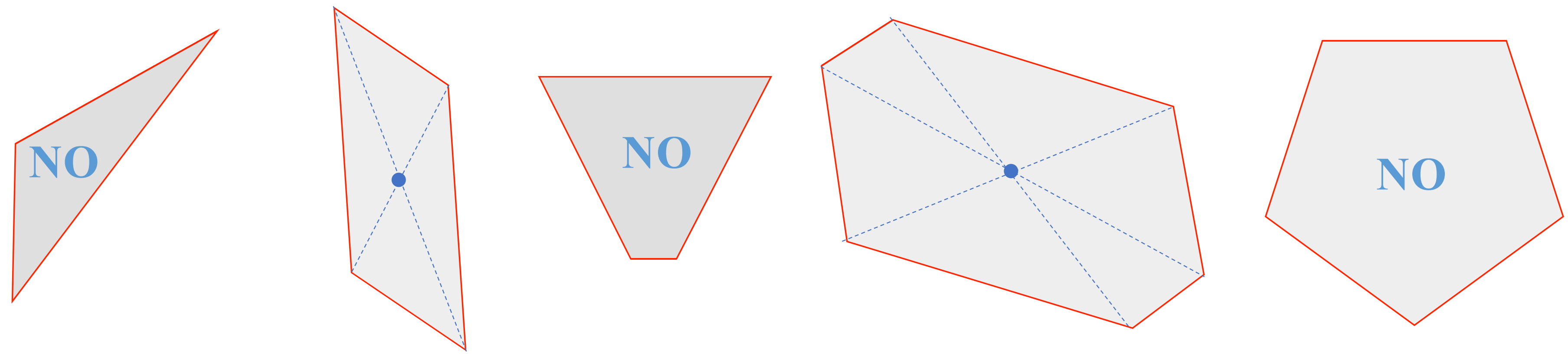
I segmenti rossi e azzurri sono a due a due simmetrici, quindi anche paralleli e isometrici. Insieme costituiscono il contorno di un parallelogrammo.

Il parallelogrammo generico è il più semplice poligono che ha un centro di simmetria.
E il triangolo? …

In una stessa figura, possono esistere più di un centro di simmetria? Provare…

La simmetria centrale nei poligoni

Piccola ricerca: trovare (se esistono) e disegnare i centri di simmetria delle figure:



Domande per una ricerchina

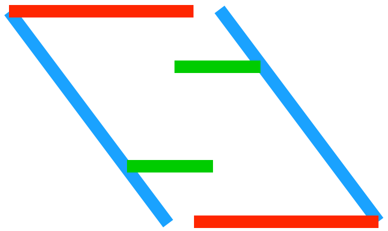
Triangoli e pentagoni non hanno centri di simmetria. Perché?

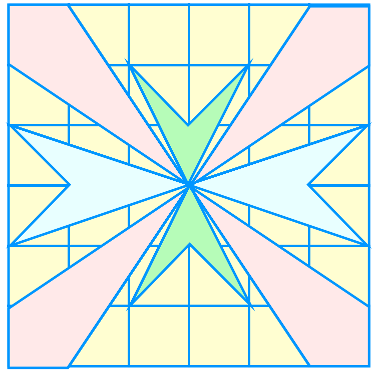
Quali altri poligoni non hanno di sicuro un centro di simmetria?

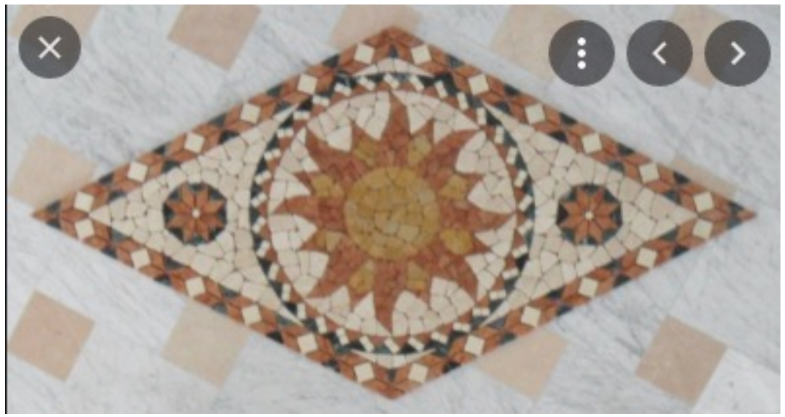
È vero che un poligono con un numero pari di lati ha un centro di simmetria?

Come devono essere i lati di un poligono che ha un centro di simmetria?

Figure simmetriche (rispetto a un centro) nell'arte



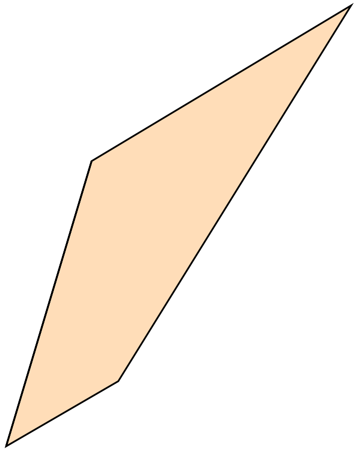




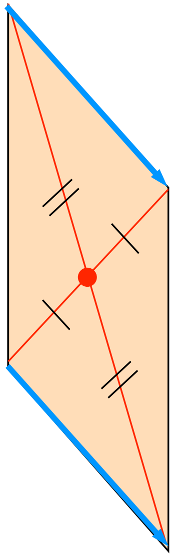
Primo sguardo ai quadrilateri

Mostra di quadrilateri

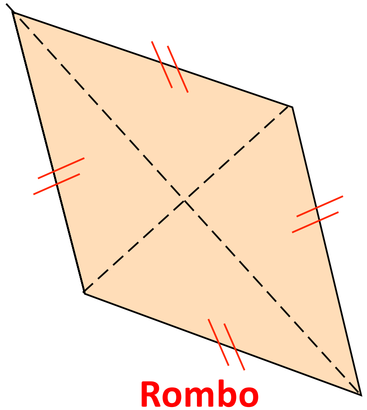
Consiglio: presentare i modellini in diverse posizioni e forme.



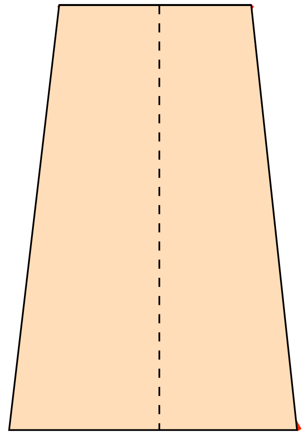
Trapezio qualunque
almeno due lati paralleli



Parallelogrammo
due coppie di lati paralleli,
un centro di simmetria,
è generato da una traslazione



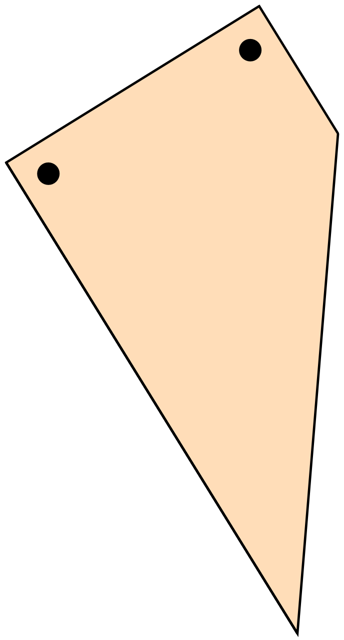
Rombo
parallelogrammo con i lati uguali,
le diagonali sono asssi di simmetria,
il loro punto di intersezione è centro di simmetria



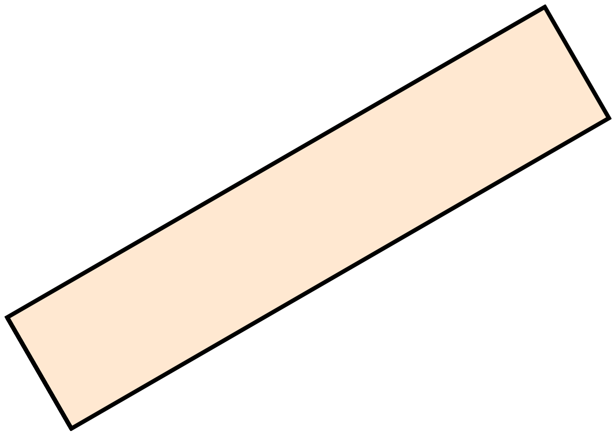
Trapezio isoscele
ha l’asse di simmetria dei due lati paralleli

(Tutti e quattro sono trapezi)

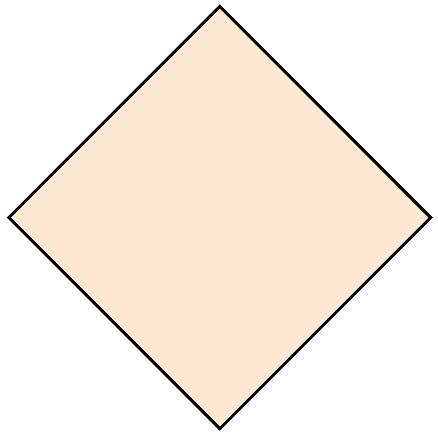
Mostra di quadrilateri (continua)



Trapezio rettangolo
ha almeno un angolo retto



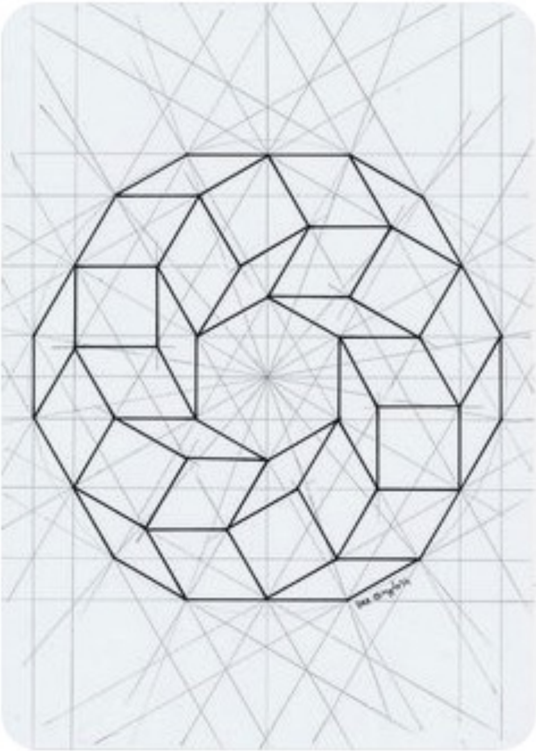
Rettangolo
ha almeno due angoli retti



Quadrato
è rettangolo e rombo

Quadrilateri nell’arte

Paul Klee, 1927



Maurits Corneli Escher 1917

Lorenzo Bocca, 2011

Attività interessanti concernenti prismi e piramidi

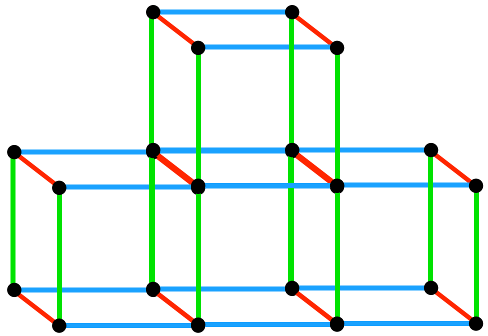
Sapyent

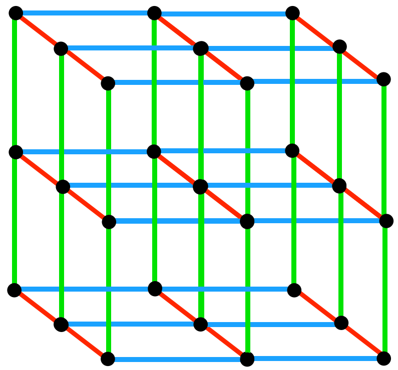
Per gli insegnanti

Nella scuola primaria l'apprendimento delle figure solide non può essere spinto fino al riconoscimento di tutte le proprietà basilari, come si può fa con le figure piane.
È però importante indagare sulla loro struttura macroscopica.
Nella continuazione dell'iter scolastico si insiste molto sulla metrica: calcolo di lunghezze, aree, volumi e ampiezze.
L'esperienza insegna che senza un lavoro propedeutico sui solidi, come quello che consigliamo di svolgere nella primaria, l'apprendimento della geometria metrica risulta arduo e l'alunno diventa sempre più dipendente da affermazioni e da formule prestabilite, che si vede obbligato a memorizzare.
Il lavoro di preparazione, dopo i primi contatti visti nella lezione precedente può consistere in attività legate alla manipolazione e alla relativa generalizzaione.

Sapyent

Costruzioni cubiche scheletrate





QUANTE CANNUCCE ROSSE, QUANTE AZZURRE, QUANTE VERDI E QUANTE PALLINE NERE HA USATO CLESSY PER OGNI COSTRUZIONE?

Coloriamo le facce di prismi e piramidi

Ogni faccia deve avere un solo colore. Due facce con uno spigolo in comune devono avere colori diversi. Occorre usare il numero minimo di colori. Quanti?

nome del solido	nr. lati faccia caratteristica	nr. lati colori usati
prisma triang.	3	4
prisma quadrang.	4	3
prisma pentag.	5	4
prisma esag.	6	3
prisma ettag.	7	4
prisma ottag.	8	3

Infine è interessante chiedere agli alunni quanti colori sono necessari per un prisma n-agono con n=20 e per un altro con n=21 (per esempio).
Questa domanda stimola le capacità di estrapolazione. La risposta è interessante perché chiama in causa la parità di un numero naturale.

Sapyent

Contiamo vertici, spigoli e facce di prismi e piramidi

Contare, sì, ma come? 1, 2, 3, … si può, ma con numeri non troppo grandi.
E allora?

solido	Nr. lati faccia caratteristica	Nr. vertici	Nr. spigoli	Nr. facce
PRISMI	3	3x2=6	3x3=9	3+2=5
	4	4x2=8	4x3=12	4+2=6
	5	5x2=10	5x3=15	5+2=7
	n	nx2	nx3	n+2
PIRAMIDI	3	3+1=4	3x2=6	3+1=4
	4	4+1=5	4x2=8	4+1=5
	5	5+1=6	5x2=10	5+1=6
	n	n+1	nx2	n+1

Alla generalizzazione possono giungere tutti, anche solo a parole.

Scopriamo la formula di Eulero

Se si è svolta l'attività precedente, gli alunni non conteranno più i vari elementi, ma li calcoleranno. Quindi una tabella come quella seguente (o anche più lunga) riescono a completarla in tempi ristretti.

Solido	Vertici (V)	Spigoli (S)	Facce (F)
Prisma triang.	6	9	5
Prisma quadrang.	8	12	6
Prisma pentag.	10	15	7
Piramide esag.	7	12	7
Piramide ottag.	9	16	9

Questa tabella nasconde un segreto. Quale?

Scopriamo la formula di Eulero

Lasciamo che gli alunni si esprimano. Possiamo ev. porre domande-chiave.

V	S	F	Differenza
6	9	5	2
8	12	6	2
10	15	7	2
7	12	7	2
9	16	9	2

In ogni riga (solido), qual è il numero maggiore?
Gli spigoli (S), nettamente.
I due numeri minori (V e F) potrebbero mettersi insieme per cercare di superare il numero S.
Ce la faranno?
Scoperta importante:
V+F supera sempre di 2 il numero S, cioè
V+F = S+2

Il risultato è la Formula di Eulero per poliedri, matematico svizzero del XVIII secolo!
In realtà non vale per tutti i poliedri, ma per prismi e piramidi, sì.
I poliedri che soddisfano l'uguaglianza si dicono **euleriani**. Fra i non-euleriani troviamo, per esempio, un cubo con un cubetto appoggiato su una sua faccia.

Sapyent

I poliedri regolari

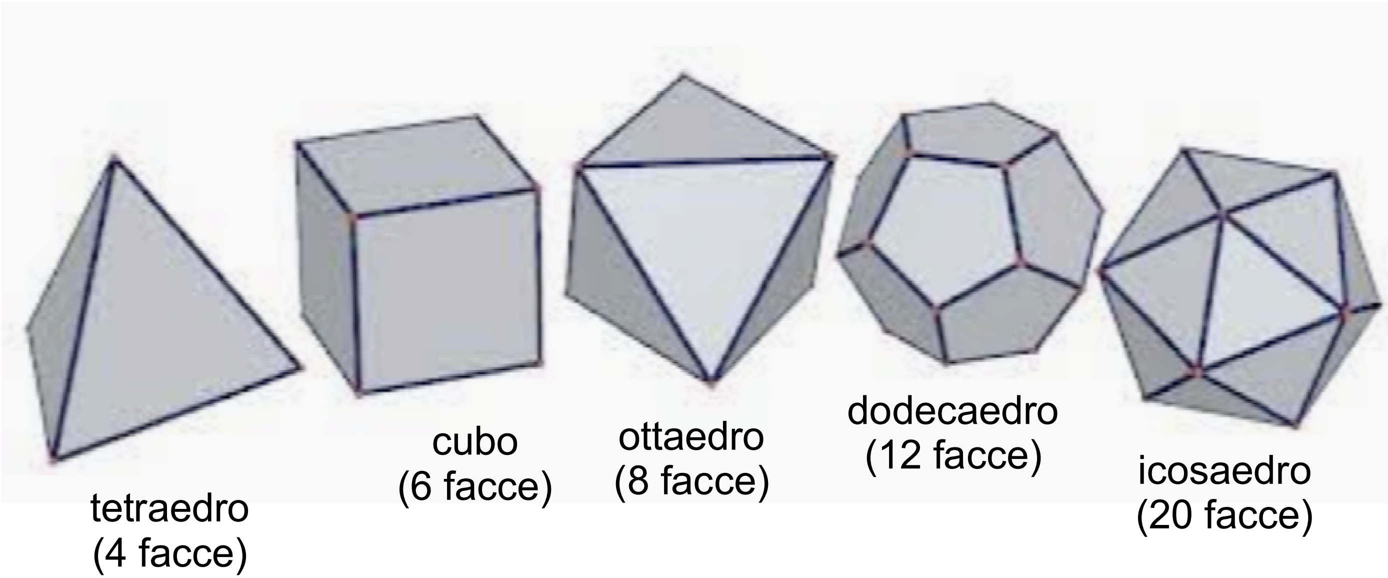
o solidi platonici

Come costruirli

Le loro facce sono poligoni regolari.
Ogni vertice deve appartenere a un numero fisso di facce.
La somma delle ampiezze degli angoli in ogni vertice dev’essere minore di 360˚.
Troviamoli, aiutandoci con una tabella e con materiali di costruzione.

Tipo di faccia	Ampiezza angolo interno	Nr. Facce in ogni vertice	Somma ampiezze in ogni vertice	È possibile? (minore di 360˚)	Nome del poliedro regolare
Triangolo	60˚	3	180˚	sì	tetraedro
Triangolo	60˚	4	240˚	sì	ottaedro
Triangolo	60˚	5	300˚	sì	icosaedro
Quadrato	90˚	3	270˚	sì	cubo
Quadrato	90˚	4	360˚	no	-
Pentagono	108˚	3	324˚	sì	dodecaedro
Pentagono	108˚	4	432˚	no	-
Esagono	120˚	3	360˚	no	-

Modellini dei solidi platonici

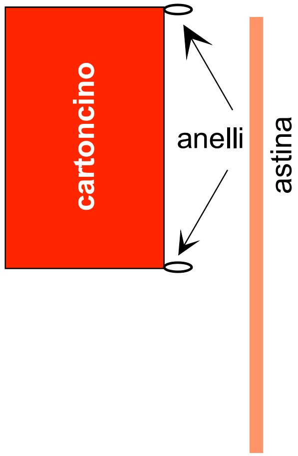


Platone (V sec. A.C.) associò ai poliedri regolari i cinque elementi indicati dai filosofi greci (Talete di Mileto, Eraclito, Pitagora e altri) come il principio di ogni cosa:
al tetraedro il fuoco, al cubo la terra, all'ottaedro l'aria, all'icosaedro l'acqua e ritenne che il dodecaedro fosse la forma dell'universo.

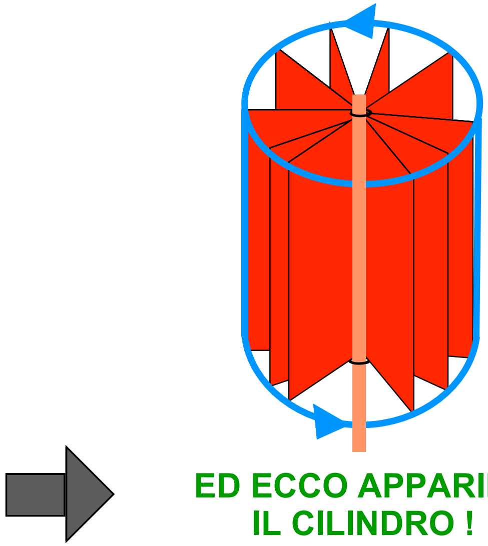
Tre solidi di rotazione molto conosciuti

Il cilindro

Costruiamo una girandola.



PREPARATIVI



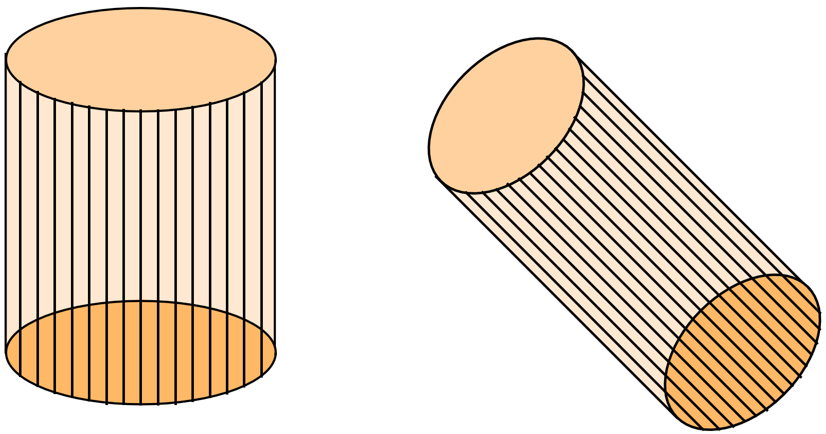
ED ECCO APPARIRE
IL CILINDRO !

Ritagliare un rettangolo di cartoncino
Fissare due anelli come indicato nella figura.
Inserire gli anelli in un'asta in modo che il rettangolo possa ruotare.
Agitando convenientemente l'asticella, far ruotare la girandola come farebbe il vento.
La rotazione genera una figura 3D, più precisamente un **cilindro**.

Rispetto al prisma ha aspetti uguali ed altri differenti. Quali?

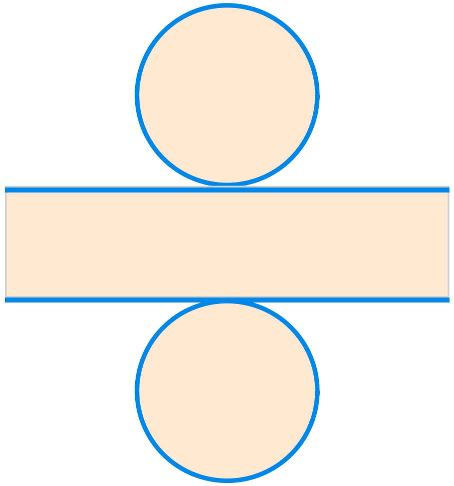
Il cilindro

Radiografia del cilindro



Due facce circolari (cerchi), uguali e parallele, unite a un rettangolo ricurvo.

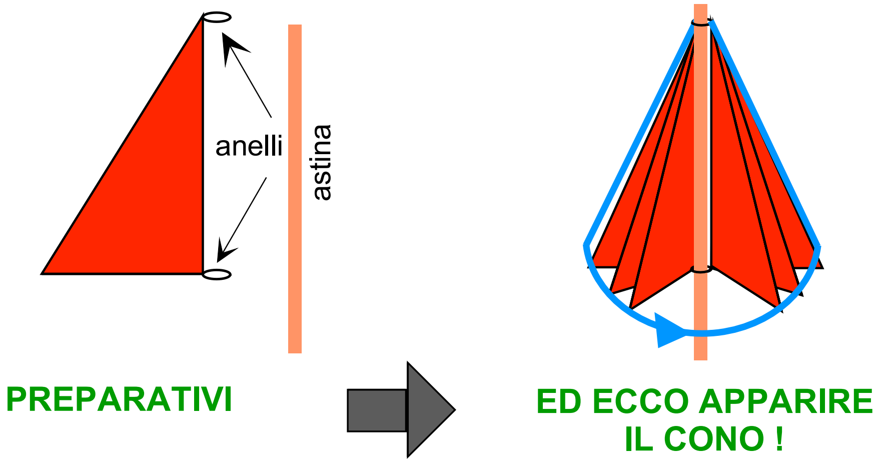
Sviluppo del cilindro



Le circonferenze hanno stessa lunghezza del lato indicato del rettangolo.

Il cono: un altro solido di rotazione

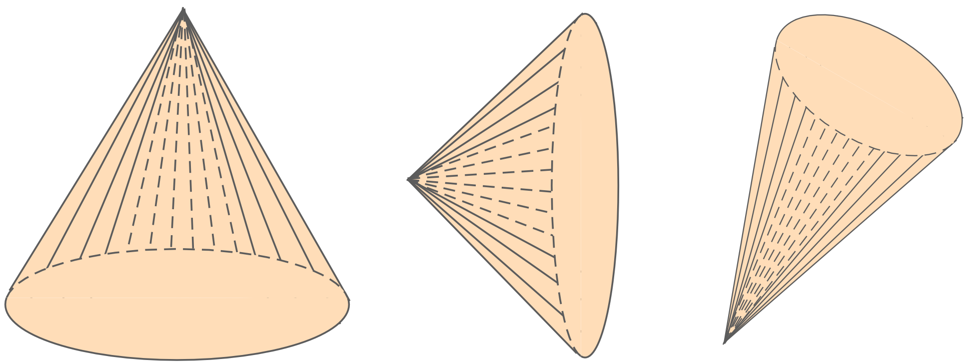
Costruiamo una nuova girandola prendendo come cartoncino un triangolo rettangolo che andrà fatto ruotare lungo un cateto.



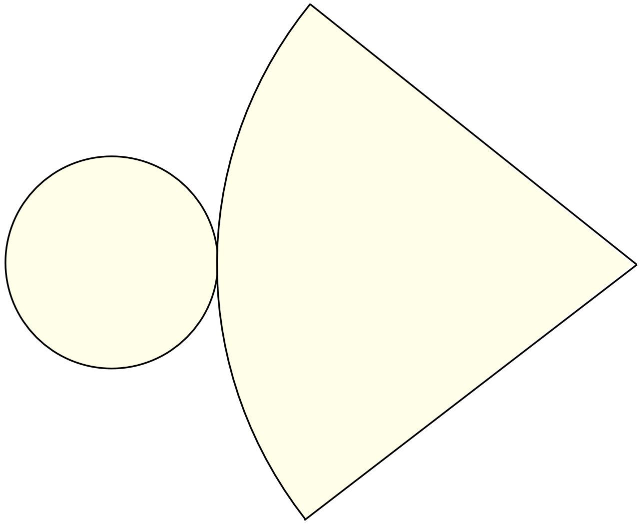
A quale solido assomiglia?
Quali differenze e quali uguaglianze trovi rispetto al solido analogo?

Il cono

Radiografia



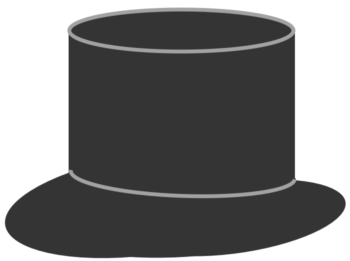
Sviluppo

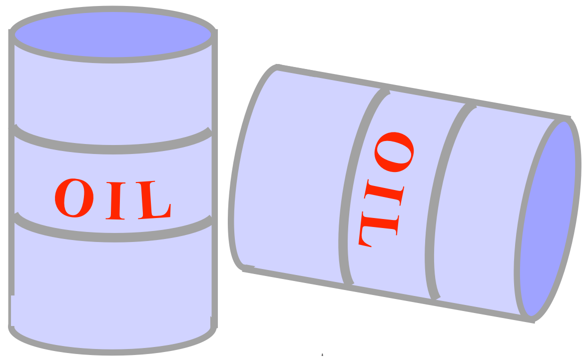


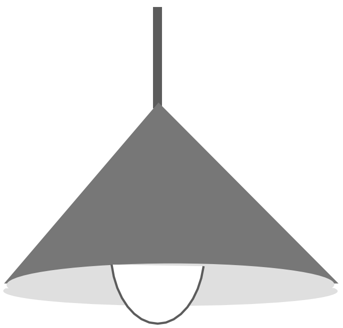
Una faccia circolare saldata a un settore circolare.

Anche qui abbiamo linee di stessa lunghezza. Quali?

Cilindri e coni nella realtà (esempi)

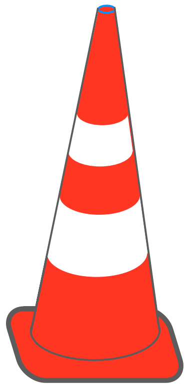






PARALUME

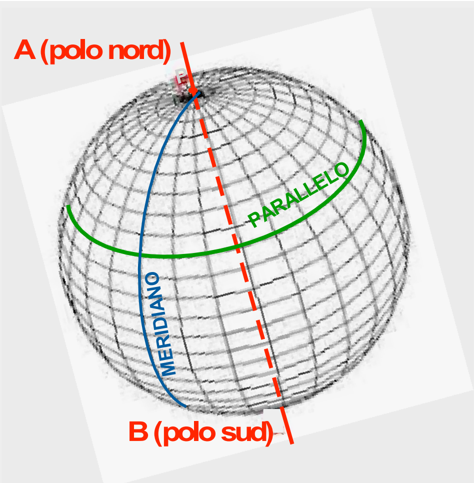
CONO GELATO



CONO STRADALE

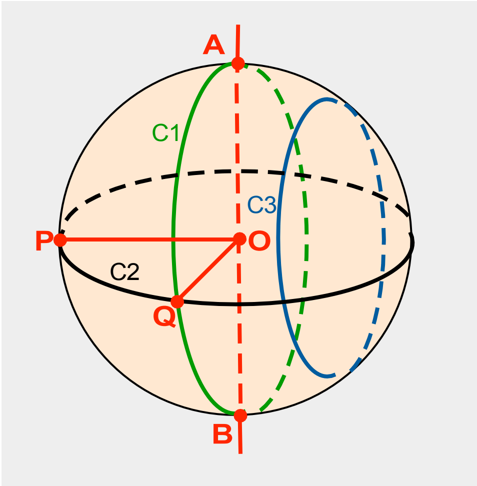
La sfera

Modellino della Terra.



Pallone da basket

Radiografia della sfera



Sul pallone da basket disegna qualche altro meridiano e un parallelo non massimo.

Curiosità: è impossibile ottenere lo sviluppo della sfera.
È impossibile appiccicare un francobollo su una sfera,
mentre lo è sulle superfici rotonde di cilindri e coni. Provaci!

FINE LEZIONE 2

gianar76@gmail.com

http://bit.ly/GeometriaDynamica